פתרון מטלה 06 — משוואות דיפרנציאליות, 80320

23 במאי 2026

שאלה 1

סעיף א'

נמצא פתרונות כלליים למשוואה

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x(t)$$

נצייר דיאגרמת זרימה המתאימה למשוואה האחרונה ונקבע האם ראשית הצירים היא נקודת שווי משקל יציבה או לא.

הוכחה: נמצא את הערכים העצמיים של מטריצת המקדמים A:

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda+5 & -1 \\ -4 & \lambda+2 \end{pmatrix} = (\lambda+5)(\lambda+2) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 10 - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6$$

ולערך הערכים העצמיים של A הם $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -6$.
נמצא וקטורים עצמיים

1. עבור $\lambda_1 = -1$ נפתור את המערכת $(A+I)v_1 = 0$ כלומר

$$(A+I)v_1 = 0 \iff \left(\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) v_1 = 0 \iff \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} v_1 = 0 \iff y = 4x$$

ולכן הוקטור העצמי המתאים הוא $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. עבור $\lambda_2 = -6$ נפתור את המערכת $(A+6I)v_2 = 0$ כלומר

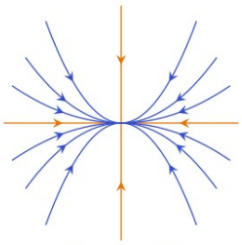
$$(A+6I)v_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} v_2 = 0 \iff y = -x$$

ולכן הוקטור העצמי המתאים הוא $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

הפיתרון הכללי הוא

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

יש לנו שני ערכים עצמיים ממשיים שליליים ולכן הדיאגרמה המתאימה לכך היא



$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

נבחין שכאשר $t \to \infty$ הן e^{-6t} והן e^{-t} מתכנסים לאפס ולכן כל פיתרון של המערכת שואף לראשית הצירים ולכן זו נקודת שיווי משקל יציבה (ואף יציבה אסימפטוטית).□

סעיף ב'

נמיר את המשוואה $x'' + x' - 2x = 0$ במערכת משוואות מסדר ראשון, נמצא פתרון כללי למשוואות ונצייר דיאגרמת זרימה מתאימה למערכת.

פתרון: נגדיר $x_1 = x, x_2 = x'$ ולכן נקבל משוואה מסדר ראשון $x_1' = x_2$ וכן

$$x_2' = x'' = 2x - x' = 2x_1 - x_2$$

ובכתיב מטריציוני

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

נמצא ערכים עצמיים, הפולינום האופייני הוא

$$P_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda-1)(\lambda+2)$$

ולכן הערכים העצמיים של המטריצה A הם $\lambda_1 = 1$ ו־$\lambda_2 = -2$, שוב נמצא וקטורים עצמיים

1. עבור $\lambda_1 = 1$ נפתור את המערכת $(A - I)v_1 = 0$ כלומר

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow y = x$$

לכן וקטור עצמי מתאים הוא $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. עבור $\lambda_2 = -2$ נפתור את המערכת $(A + 2I)v_2 = 0$ כלומר

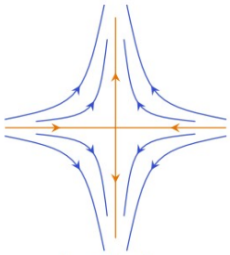
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow y = -2x$$

לכן וקטור עצמי מתאים הוא $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

הפיתרון הכללי הוא

$$x(t) = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

יש לנו ערך עצמי חיובי וערך עצמי שלילי ולכן ראשית הצירים היא נקודת אוכף שכן לאורך הישר $y = -2x$ (הכיוון של v_2), הפתרונות דועכים ושואפים אל הראשית בגלל המעריך השלילי e^{-2t}. מצד שני, לאורך הישר $y = x$ (הכיוון של v_1), הפתרונות מתרחקים מהראשית בגלל המעריך החיובי e^{t}.
כל שאר המסלולים במרחב זורמים מתוך הישר של v_2 ומתעקלים החוצה בכיוון האסימפטוטי של הישר v_1.
כלומר, זו נקודת שיווי משקל לא יציבה.



$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

□

שאלה 2

תהיי $F:\Omega\to\mathbb{R}^n$ ליפשיץ מקומית ונתבונן בבעיית תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} x' = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

נניח כי הקורדינאטות של F כולן אי־שליליות (ולכן הקורדינאטות של פתרון של הבעיה יהיו מונוטוניות עולות).
תהיי $U\subset\Omega$ פתוחה וחסומה כך שמתקיים $\overline{U}\subset\Omega$ ונסמן את הפיתרון המקסימלי לבעיה לעיל ב־x ונניח כי $x_0\in U$.
נוכיח כי לפחות אחת מהאפשרויות הבאות מתקיימת

1. x מגיע לשפה של U בזמן סופי
2. הגבול $\lim_{t\to\infty} x(t)$ קיים ונמצא ב־$\overline{U}$ והנקודה $\lim_{t\to\infty} x(t)$ היא נקודת שיווי משקל של F

הוכחה: נניח בשלילהש־$x(t)$ מוגדר לכל $t\geq 0$ ואינו מגיע לשפה בזמן סופי, כלומר $x(t)\in U$ לכל $t\geq 0$.
מכיוון ש־U היא קבוצה חסומה (ונתון $\overline{U}\subset\Omega$), הסדרה הרציפה $x(t)$ מונוטונית עולה (בכל קואורדינטה) וחסומה מלעיל.
ממשפט ההתכנסות המונוטונית נובע שהגבול $L=\lim_{t\to\infty} x(t)$ קיים ומכיוון ש־$x(t)\in U$ נובע כי $L\in\overline{U}\subset\Omega$.
נותר להראות ש־L היא נקודת שווי משקל של F, כלומר ש־$F(L)=0$.
מכיוון ש־F רציפה (ליפשיץ מקומית), מתקיים:

$$\lim_{t\to\infty} x'(t) = \lim_{t\to\infty} F(x(t)) = F(L)$$

נניח בשלילה ש־$F(L)\neq 0$ אז קיימת קואורדינטה i כדש־$F_i(L)>0$.
מרציפות F קיים $\varepsilon>0$ ו־$T>0$ כך שלכל $t>T$ מתקיים $x_i'(t)>\varepsilon$ ומאינטגרציה נקבל

$$x_i(t)-x_i(T) = \int_T^t x_i'(s)\,\mathrm{d}s > \int_T^t \varepsilon\,\mathrm{d}s = \varepsilon(t-T)$$

כאשר $t\to\infty$, הפונקציה $x_i(t)\to\infty$, וזה בסתירה לכך ש־$x(t)$ חסומה (שכן $x(t)\in U$) כלומר בהכרח מתקיים $F(L)=0$, ו־L היא נקודת שווי משקל. $\square$

שאלה 3

סעיף א'

נתבונן במשוואה $a(t)x''(t)+b(t)x'(t)+c(t)x(t)=0$ ונניח ש־$y(t)$ היא פונקציה שפותרת את המשוואה.
נראה כי פונקציה מהצורה $z(t)=v(t)y(t)$ פותרת את המשוואה אם ורק אם $v'(t)$ פותרת משוואה מסדר ראשון.

הוכחה: נחשב את הנגזרות של $z(t)$

$$z'(t)=v'(t)y(t)+v(t)y'(t)$$
$$z''(t)=v''(t)y(t)+2v'(t)y'(t)+v(t)y''(t)$$

נציב במשוואה הנתונה ונקבל

$$a(t)[v''(t)y(t)+2v'(t)y'(t)+v(t)y''(t)]+b(t)[v'(t)y(t)+v(t)y'(t)]+c(t)[v(t)y(t)]=0$$

סידור מחדש יניב לנו

$$v(t)[a(t)y''(t)+b(t)y'(t)+c(t)y(t)]+v'(t)[2a(t)y'(t)+b(t)y(t)]+v''(t)[a(t)y(t)]=0$$

נתון כי $y(t)$ היא פונקציה שפותרת את המשוואה המקורית, ולכן הביטוי בסוגריים הראשונים מתאפס בהכרח ($a(t)y''+b(t)y'+c(t)y=0$) ונקבל

$$[a(t)y(t)]v''(t)+[2a(t)y'(t)+b(t)y(t)]v'(t)=0$$

כעת, נגדיר משתנה חדש $u(t):=v'(t)$ ולכן $u'(t)=v''(t)$.
נציב ונקבל

$$[a(t)y(t)]u'(t)+[2a(t)y'(t)+b(t)y(t)]u(t)=0$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית לינארית והומוגנית מסדר ראשון עבור $u(t)$ (שהוא $v'(t)$).
כלומר קיבלנו ש־$z(t)$ פותרת את המשוואה המקורית אם ורק אם $v'(t)$ פותרת את המשוואה מסדר ראשון שקיבלנו. □

סעיף ב'

נשתמש בשיטת הורדת הסדר עבור המשוואה $x''c^2x$ וידוע כי $y(t)=e^{ct}$ פתרון למשוואה. נשתמש בשיטת הורדת הסדר כדי למצוא פתרון נוסף.

הוכחה: המשוואה הנתונה היא $x''(t)-c^2x(t)=0$, כלומר במקרה זה המקדמים הם

$$a(t)=1,\quad b(t)=0,\quad c(t)=-c^2$$

מהסעיף הקודם הפונקציה $z(t)=v(t)y(t)$ פותרת את המשוואה אם ורק אם $u(t)=v'(t)$ פותרת את המשוואה מסדר ראשון

$$[a(t)y(t)]u'(t)+[2a(t)y'(t)+b(t)y(t)]u(t)=0$$

נחשב את הנגזרת של הפתרון הנתון $y'(t)=ce^{ct}$.
נציב את הרכיבים הללו במשוואה עבור $u(t)$:

$$[1\cdot e^{ct}]u'(t)+[2\cdot 1\cdot ce^{ct}+0\cdot e^{ct}]u(t)=0\iff e^{ct}u'(t)+2ce^{ct}u(t)=0$$

נחלק ב־e^{ct} (שהוא תמיד שונה מאפס) ונקבל משוואה לינארית פשוטה הנתנת להפרדת משתנים

$$u'(t)+2cu(t)=0\iff u'(t)=-2cu(t)$$
$$\frac{du}{dt}=-2cu$$
$$\sum\frac{1}{u}du=\sum -2cdt$$
$$\ln|u|=-2ct+C_1u(t)=C_2e^{-2ct}$$

נבחר את הקבוע $C_2=1$ ומכוון ש־$u(t)=v'(t)$ מאינטגרציה נקבל

$$v(t)=\sum u(t)dt=\sum e^{-2ct}dt=-\frac{1}{2c}e^{-2ct}$$

כעת, נחזור לפונקציה $z(t)$

$$z(t)=v(t)y(t)=\left(-\frac{1}{2c}e^{-2ct}\right)\cdot e^{ct}=-\frac{1}{2c}e^{-ct}$$

מכיוון שהמשוואה המקורית היא לינארית והומוגנית, כל כפילת פתרון בקבוע קבוע היא גם פתרון.
נוכל להשמיט את המקדם הבלתי תלוי $-\frac{1}{2c}$ ולקבל שהפתרון הנוסף הבלתי תלוי ליניארית הוא $z(t)=e^{-ct}$. □

סעיף ג'

משוואת אויילר היא משוואה לינארית מסדר שני מהצורה

$$at^2x''(t) + btx'(t) + cx(t) = 0$$

כדי לפתור את משוואת אוילר מנסים למצוא r כך שהפונקציה t^r פתרון למשוואה.

תת־סעיף א'

נעזר בשיטה לעיל כדי למצוא פיתרון כללי למשוואה $t^2x''(t) + 7tx'(t) + 5x(t) = 0$.

פתרון: נחשב את הנגזרות המתאימות

$$x'(t) = rt^{r-1}x''(t) = r(r-1)t^{r-2}$$

נציב את הנגזרות הללו לתוך המשוואה הנתונה $t^2x''(t) + 7tx'(t) + 5x(t) = 0$

$$t^2\left[r(r-1)t^{r-2}\right] + 7t\left[rt^{r-1}\right] + 5t^r = 0 \iff r(r-1)t^r + 7rt^r + 5t^r = 0 \iff t^r[r(r-1) + 7r + 5] = 0$$

מכיוון שפתרון זה נדרש להתקיים באופן כללי (עבור $t \neq 0$), הביטוי בסוגריים המרובעים חייב להתאפס.
נקבל את המשוואה האופיינית של משוואת אוילר

$$r^2 - r + 7r + 5 = 0r^2 + 6r + 5 = 0 \iff (r+1)(r+5) = 0$$

ולכן השורשים הם $r_1 = -1$ ו־$r_2 = -5$.
קיבלנו שני פתרונות יסודיים בלתי תלויים ליניארית: $x_1(t) = t^{-1}$ ו־$x_2(t) = t^{-5}$.
הפתרון הכללי של המשוואה הוא צירוף ליניארי שלהם

$$x(t) = c_1t^{-1} + c_2t^{-5} = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^5}$$

□

תת־סעיף ב'

נעזר בשיטה לעיל כדי למצוא פיתרון כללי למשוואה $t^2x''(t) - 3tx'(t) + 4x(t) = 0$.

פתרון: נחפש תחילה פתרון מהצורה $x(t) = t^r$.
נציב את הנגזרות $x'(t) = rt^{r-1}$ ו־$x''(t) = r(r-1)t^{r-2}$ במשוואה הנתונה ונקבל

$$t^2\left[r(r-1)t^{r-2}\right] - 3t\left[rt^{r-1}\right] + 4t^r = 0t^r[r(r-1) - 3r + 4] = 0$$

עבור $t \neq 0$, נקבל את המשוואה

$$r^2 - r - 3r + 4 = 0r^2 - 4r + 4 = 0(r-2)^2 = 0$$

קיבלנו שורש כפול $r = 2$.
אז פתרון יסודי ראשון הוא $y(t) = t^2$ וכדי למצוא פתרון שני נשתמש בשיטת הורדת הסדר שפיתחנו בשאלה עבור המקדמים $a(t) = t^2$ ו־$b(t) = -3t$.
הפונקציה $z(t) = v(t)y(t)$ היא פתרון אם ורק אם $u(t) = v'(t)$ פותרת את המשוואה

$$[a(t)y(t)]u'(t) + [2a(t)y'(t) + b(t)y(t)]u(t) = 0$$

נחשב את הנגזרת של הפתרון הראשון $y'(t) = 2t$, נציב ונקבל

$$[t^2 \cdot t^2]u'(t) + [2 \cdot t^2 \cdot (2t) + (-3t) \cdot t^2]u(t) = 0t^4u'(t) + [4t^3 - 3t^3]u(t) = 0t^4u'(t) + t^3u(t) = 0$$

נחלק ב־t^3 (עבור $t \neq 0$) ונקבל משוואה הניתנת להפרדת משתנים

$$tu'(t) + u(t) = 0t\frac{du}{dt} = -u\frac{1}{u}du = -\frac{1}{t}dt\ln|u| = -\ln|t| + Cu(t) = \frac{1}{t}$$

מכיוון ש־$u(t) = v'(t)$, נמצא את $v(t)$ על ידי אינטגרציה:

$$v(t) = \sum u(t)dt = \sum \frac{1}{t}dt = \ln t$$

כלומר $z(t) = v(t)y(t) = t^2\ln t$.
אז יש לנו שני פתרונות בלתי־תלויים ליניארית $t^2, t^2\ln t$ ולכן הפתרון הכללי למשוואה הוא $x(t) = c_1t^2 + c_2t^2\ln t$. □

שאלה 4

נתבונן במערכת

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + xy - \sqrt{x^2+y^2}(x+y) \\ y - x^2 + \sqrt{x^2+y^2}(x-y) \end{pmatrix}$$

ונשים לב ש־$(1,0)$ נקודת שיווי משקל של המערכת.

סעיף א'

נניח כי $(x(t), y(t))$ פתרון ונסמן את הקורדינאטות הפולאריות $(r(t), \varphi(t))$ של הפתרון, כלומר הפונקציות r, φ מוגדרות על־ידי

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos(\varphi(t)) \\ y(t) &= r(t)\sin(\varphi(t)) \end{aligned}$$

נראה כי

$$\begin{aligned} r'(t) &= r(t)(1-r(t)) \\ \varphi'(t) &= r(t)(1-\cos(\varphi(t))) \end{aligned}$$

הוכחה: נסמן $R = \sqrt{x^2+y^2} = r(t)$ ומתקיים $r^2 = x^2+y^2$, נגזור לפי t ונקבל

$$2rr' = 2xx' + 2yy' \to rr' = xx' + yy'$$

נציב את הביטויים של x' ו־y' מתוך המערכת הנתונה:

$$\begin{aligned} xx' + yy' &= x[x + xy - r(x+y)] + y[y - x^2 + r(x-y)] \\ &= x^2 + \cancel{x^2y} - rx^2 - \cancel{rxy} + y^2 - \cancel{x^2y} + \cancel{rxy} - ry^2 \\ &= xx' + yy' \\ &= (x^2+y^2) - r(x^2+y^2) \\ &= rr' \\ &= r^2 - r(r^2) = r^2(1-r) \end{aligned}$$

אם $r \neq 0$ ניתן לחלק ולקבל את המשוואה הראשונה $r'(t) = r(t)(1-r(t))$.
מתקיים $\tan(\varphi) = \frac{x}{y}$ ולכן אם נגזור לפי t נקבל

$$\frac{1}{\cos^2(\varphi)}\varphi' = \frac{y'x - x'y}{x^2} \underset{\cos^2(\varphi)=\frac{x^2}{r^2}}{\iff} \varphi' = \frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{xy' - yx'}{x^2} = \frac{xy' - yx'}{r^2}$$

אז

$$\begin{aligned} xy' - yx' &= x[y - x^2 + r(x-y)] - y[x + xy - r(x+y)] \\ &= \cancel{xy} - x^3 + rx^2 - \cancel{rxy} - \cancel{xy} - xy^2 + \cancel{rxy} + ry^2 \\ &= xy' - yx' \\ &= -x^3 - xy^2 + rx^2 + ry^2 \\ &= -x(x^2+y^2) + r(x^2+y^2) \end{aligned}$$

נציב שוב $x^2+y^2 = r^2$

$$xy' - yx' = -xr^2 + r(r^2) = r^2(r-x)$$

נציב את המונה חזרה במשוואה של φ'

$$\varphi' = \frac{r^2(r-x)}{r^2} = r - x$$

נשתמש בהגדרת הקואורדינטות הפולאריות $x = r\cos(\varphi)$

$$\varphi' = r - r\cos(\varphi) = r(1-\cos(\varphi))$$

וקיבלנו את הנדרש. $\square$

סעיף ב'

נראה כי קיימת סביבה U של $(1,0)$ כך שלכל $(a,b) \in U$ הפתרון למשוואה לעיל המתחיל ב־(a,b) מתכנס ל־$(1,0)$ כאשר $t \to \infty$.

הוכחה: הפתרון של המערכת הקרטזית מתכנס ל־$(1,0)$ אם ורק אם בקואורדינטות פולאריות מתקיים $r(t) \to 1$ ו־$\varphi(t) \to 2\pi k$ (עבור $k \in \mathbb{Z}$) כאשר $t \to \infty$.
נבחר סביבה פתוחה U של הנקודה $(1,0)$ המוגדרת בקואורדינטות פולאריות על־ידי

$$U = \{(r,\varphi) : r \in (0,2), \quad \varphi \in (0,2\pi)\}$$

נשים לב שנקודת השיווי משקל $(1,0)$ מתאימה לערכים $r=1, \varphi=0$ (או $\varphi = 2\pi$), והיא נמצאת על שפת התחום של הזווית שהגדרנו, אך נראה כי פתרונות המתחילים בתוך U ישאפו אליה.
ננתח את שתי המשוואות בנפרד עבור תנאי התחלה $(r_0,\varphi_0) \in U$

1. התנהגות הרדיוס $r(t)$, המשוואה $r' = r(1-r)$ היא משוואה אוטונומית מסדר ראשון.
   עבור $0 < r_0 < 1$, מתקיים $r' > 0$ ולכן $r(t)$ מונוטונית עולה וחסומה מלעיל על־ידי 1.
   עבור $1 < r_0 < 2$, מתקיים $r' < 0$ ולכן $r(t)$ מונוטונית יורדת וחסומה מלרע על־ידי 1.
   בשני המקרים, ממשפט ההתכנסות המונוטונית הרדיוס שואף לנקודת השיווי המשקל היחידה בתחום החיובי: $\lim_{t\to\infty} r(t) = 1$.
2. התנהגות הזווית $\varphi(t)$, המשוואה היא $\varphi' = r(1-\cos(\varphi))$.
   לכל תנאי התחלה שבו $\varphi_0 \in (0,2\pi)$, מתקיים $1-\cos(\varphi) > 0$.
   מאחר ש־$r(t) > 0$ לכל t, נקבל כי $\varphi'(t) > 0$ לכל t.
   המשמעות היא ש־$\varphi(t)$ היא פונקציה מונוטונית עולה ממש.
   מכיוון ש־$\varphi(t)$ חסומה מלעיל על־ידי נקודת השיווי משקל הבאה שלה ב־2π (שם $1-\cos(2\pi) = 0$ והנגזרת מתאפסת), היא חייבת להתכנס לגבול קבוע.
   הגבול חייב להיות נקודת שיווי משקל של המשוואה, ולכן: $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 2\pi$.

□

סעיף ג'

נוכיח כי $(1,0)$ אינה נקודת משקל יציבה.

הוכחה: נבחר תנאי התחלה על מעגל היחידה, כלומר עם רדיוס $r_0 = 1$, ובזווית חיובית קטנה כרצוננו $\varphi_0 = \alpha > 0$.
המרחק של הנקודה הקרטזית $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ מנקודת שווי המשקל $(1,0)$ ניתן להקטנה כרצוננו על ידי בחירת α קרובה מספיק לאפס.
נבחן את התנהגות הפתרון: מאחר ש־$r_0 = 1$ והמשוואה היא $r' = r(1-r)$, הרדיוס נשאר קבוע לכל זמן: $r(t) = 1$ לכל $t > 00$.
המשוואה עבור הזווית היא $\varphi' = 1-\cos(\varphi)$. מכיוון שבתחילת התנועה $\varphi_0 = \alpha in(0,2\pi)$, מתקיים $\varphi'(t) > 0$, ולכן הזווית $\varphi(t)$ היא פונקציה מונוטונית עולה ממש.
מכיוון ש־$\varphi(t)$ עולה ממש ושואפת ל־2π כאשר $t \to \infty$, קיים זמן סופי $t_1 > 0$ שבו הפתרון מגיע בדיוק לחצי סיבוב, כלומר לזווית $\varphi(t_1) = \pi$.
נבדוק את המיקום הקרטזי של הפתרון בזמן t_1

$$x(t_1) = r(t_1)\cos(\varphi(t_1)) = 1 \cdot \cos(\pi) = -1 y(t_1) = r(t_1)\sin(\varphi(t_1)) = 1 \cdot \sin(\pi) = 0$$

כלומר, הפתרון הגיע לנקודה $(-1,0)$.
המרחק של נקודה זו מנקודת שווי המשקל $(1,0)$ הוא $\sqrt{(-1-1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-2)^2} = 2$.
מכך נובע שלכל מרחק התחלתי קטן כרצוננו מהראשית, הפתרון מבצע סיבוב ומגיע למרחק 2 מנקודת שווי המשקל כלומר היא לא יכולה להיות יציבה. □